

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Горбунев Алексей Александрович

Должность: Заместитель начальника университета по учебной работе

Дата подписания: 25.06.2024 17:07:20

Уникальный программный ключ:

286e49ee1471d400cc1f45539d51ed7bbf0e9cc7

ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский университет ГПС МЧС России»

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
Вычислительная математика**

**Бакалавриат по направлению подготовки
27.03.03 Системный анализ и управление
направленность (профиль)
«Системный анализ и управление в организационно-
технических системах»**

1. Цель и задачи дисциплины

Цель освоения дисциплины:

овладение методами математического познания и методологией работы с математическими объектами в контексте их применения для решения профессионально-ориентированных задач в области системного анализа и управления в организационно-технических системах.

Перечень компетенций, формируемых в процессе изучения дисциплины

Компетенции	Содержание
ОПК-1	Способен анализировать задачи профессиональной деятельности на основе положений, законов и методов в области естественных наук и математики.

Задачи дисциплины:

– формирование навыков, связанных со способностью применения математических, системно-аналитических, вычислительных методов и программных средств для решения прикладных задач в области создания систем анализа и автоматического управления и их компонентов;

– овладение методами построения математических моделей на основе знаний профильных разделов математических и естественно-научных дисциплин для решения прикладных задач в области управления объектами техники, технологии, организационными системами;

– овладение необходимым аппаратом вычислительной математики и теории алгоритмов, дающим возможность осуществлять постановку задач в области математики, системного анализа, теории управления и выполнять эксперименты по проверке их корректности и эффективности;

– формирование умений, связанных со способностью применения фундаментальных положений, законов и методов естественных наук и математики при решении профессиональных задач системного анализа и автоматического управления с одновременным использованием вычислительной техники и информационных технологий.

2. Перечень планируемых результатов обучения дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Индикаторы достижения компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине
Способен решать задачи управления (анализа) в организационно-технических	Знает
	основные понятия и методы высшей и вычислительной математики, позволяющие анализировать и решать задачи

системах, выделяя базовые составляющие, осуществляет декомпозицию задачи ОПК–1.1	управления в организационно-технических системах.
	Умеет
	использовать основные положения, законы и методы естественных наук и математики, вычислительной математики, математического моделирования при анализе и решении типовых задач в области профессиональной деятельности, связанной с системным анализом и автоматическим управлением.
	Владеет
Применяет методы анализа профессиональных задач, умеет выбирать возможные варианты решения задачи управления в организационно-технических системах, оценивая их достоинства и недостатки ОПК–1.2	математическими методами, включая методы математического моделирования, применяемыми при анализе и решении типовых задач в области системного анализа и автоматического управления.
	Знает
	основные положения, законы и методы высшей и вычислительной математики, математического моделирования, методы управления (анализа) для решения профессиональных задач управления в организационно-технических системах.
	Умеет
	использовать основные положения и методы высшей и вычислительной математики, математического моделирования, методы управления (анализа) при решении профессиональных задач управления в организационно-технических системах.
	Владеет
	методом математического моделирования, методами анализа профессиональных задач с целью выбора возможных вариантов решения задачи управления в организационно-технических системах, оценивая их достоинства и недостатки.

3. Место дисциплины в структуре основной профессиональной образовательной программы

Дисциплина относится к обязательной части основной профессиональной образовательной программы бакалавриата по направлению подготовки 27.03.03 Системный анализ и управление, профиль «Системный анализ и управление в организационно-технических системах».

4. Структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 5 зачетных единиц, 180 часов.

4.1 Распределение трудоемкости учебной дисциплины по видам работ по семестрам и формам обучения

для очной формы обучения

Вид учебной работы	Трудоемкость			
	з.е.	час.	по семестрам	
			4	5
Общая трудоемкость дисциплины по учебному плану	5	180	72	108
Контактная работа, в том числе:		74	36	38
Аудиторные занятия		72	36	36
Лекции (Л)		28	14	14
Практические занятия (ПЗ)		38	20	18
Лабораторные работы (ЛР)		6	2	4
Самостоятельная работа (СРС)		70	36	34
в том числе:				
курсовая работа (проект)				
консультации перед экзаменом		2		2
Зачет		+	+	
Экзамен		36		36

4.2. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий.

для очной формы обучения

№ п/п	Наименование тем	Всего часов	Количество часов по видам занятий				Контроль	Самостоятельная работа
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	Консультация		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
4 семестр								
1	Введение в элементарную теорию погрешностей. Критерии оценки вычислений.	10	2	4				4
2	Интерполирование функций.	8	2	2				4
3	Интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона.	8	2	2				4
4	Численное дифференцирование функций.	14	2	4				8
5	Численное интегрирование функций.	14	2	4				8

6	Численные методы линейной алгебры.	8	2	2				4
7	Итерационные методы решения задач линейной алгебры.	10	2	2	2			4
	Зачет	+		+			+	
	Итого за 4 семестр	72	14	20	2		+	36
5 семестр								
8	Методы приближения и аппроксимация функций.	18	2	4	2			10
9	Численные методы решения нелинейных уравнений.	10	2	2				6
10	Итерационные методы решения нелинейных уравнений и систем.	10	2	2	2			4
11	Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).	12	2	4				6
12	Численные методы одномерной оптимизации.	12	4	4				4
13	Численные методы решения систем дифференциальных уравнений (ДУ) высокого порядка.	8	2	2				4
	Консультации	2				2		
	Экзамен	36					36	
	Итого за 5 семестр	108	14	18	4	2	36	34
	Итого по дисциплине	180	28	38	6	2	36	70

4.3. Тематический план для обучающихся очной формы обучения

Тема 1. Введение в элементарную теорию погрешностей.

Критерии оценки вычислений.

Лекция. Понятие математического моделирования и решения инженерных задач на ПК. Корректность и обусловленность вычислительных задач. Вычислительные методы. Источники и классификация погрешностей результата численного решения задачи. Приближенные числа. Абсолютная и относительная погрешность. Погрешность арифметических операций над приближенными числами. Погрешность функции. Понятие линейного нормированного пространства. Вычисление абсолютной и относительной погрешности в линейных нормированных пространствах. Сходимость последовательностей в линейных нормированных пространствах.

Практическое занятие. Вычисление погрешностей. Оценка обусловленности вычислительной задачи.

Практическое занятие. Критерии оценки вычислений.

Самостоятельная работа. Нахождение числа обусловленности вычислительной задачи. Определение характеристик вычислительных задач. Вычисление норм элементов в линейных нормированных пространствах.

Рекомендуемая литература:

основная [1, 2];

дополнительная [1, 2,3].

Тема 2. Интерполирование функций

Лекция. Понятие об интерполяции. Интерполяция обобщенными многочленами. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Интерполяционная схема Эйткина. Погрешность интерполяции.

Практическое занятие. Интерполяция по формулам Лагранжа и Эйткина

Самостоятельная работа. Интерполяционные многочлены Гаусса и Стирлинга.

Рекомендуемая литература:

основная [1, 2];

дополнительная [1, 2,3].

Тема 3. Интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона

Лекция. Конечные разности и их свойства. Интерполяционный многочлен Ньютона для равноотстоящих узлов. Разделенные разности и их свойства. Интерполяционный многочлен Ньютона для неравных промежутков. Оценка погрешности интерполяции по таблице конечных разностей.

Практическое занятие. Составление таблиц для конечных и разделённых разностей. Вычисление значений функций по интерполяционным формулам Лагранжа и Ньютона. Оценка погрешности интерполяции.

Самостоятельная работа. Интерполяционные многочлены Гаусса и Стирлинга. Интерполяционная схема Эйткина. Выполнение расчётно-графической (контрольной работы) по теме «Интерполяция функций».

Рекомендуемая литература:

основная [1, 2];

дополнительная [1, 2,3].

Тема 4. Численное дифференцирование функций

Лекция. Приближенное вычисление производной по её определению. Оценка погрешности. Конечно-разностная аппроксимация производных. Вычисление производных с применением интерполяционных многочленов. Оценка погрешности численного дифференцирования.

Практическое занятие. Вычисление производных по простейшим формулам численного дифференцирования. Численное дифференцирование с применением формулы Лагранжа.

Практическое занятие. Вычисление производных в промежуточных точках таблицы и в узлах таблицы по формулам Ньютона. Оценка погрешности численного дифференцирования.

Самостоятельная работа. Формулы численного дифференцирования высокого порядка.

Рекомендуемая литература:

основная [1, 2];

дополнительная [1, 2,3].

Тема 5. Численное интегрирование функций

Лекция. Постановка задачи численного интегрирования. Формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона. Оценка погрешности формул численного интегрирования. Вычисление определенных интегралов по формуле Гаусса. Правило Рунге практической оценки погрешности.

Практическое занятие. Численное интегрирование функций разными методами.

Самостоятельная работа. Формулы численного интегрирования высокой алгебраической точности. Приближенное вычисление несобственных интегралов. Выполнение расчётно-графической (контрольной) работы по теме «Численное интегрирование».

Рекомендуемая литература:

основная [1, 2];

дополнительная [1, 2,3].

Тема 6. Численные методы линейной алгебры

Лекция. Приближенное решение систем линейных алгебраических уравнений в схеме Гаусса. Оценка погрешности. Метод невязок. Приближенное вычисление определителей в схеме Гаусса. Приближенное вычисление обратной матрицы в схеме Гаусса.

Практическое занятие. Решение линейных систем, определителей и обратной матрицы в схеме Гаусса.

Самостоятельная работа. Уменьшение погрешности решения задач линейной алгебры методом невязок.

Рекомендуемая литература:

основная [1, 2];

дополнительная [1, 2,3].

Тема 7. Итерационные методы решения задач линейной алгебры

Лекция. Метод простых итераций решения систем линейных уравнений. Достаточное условие сходимости итерационного процесса. Оценка числа итераций и погрешности.

Практическое занятие. Итерационные методы решения систем линейных уравнений. Оценка числа итераций и погрешности.

Лабораторная работа. Итерационный метод решения систем линейных алгебраических уравнений.

Самостоятельная работа. Разработка алгоритмов решения линейной алгебры. Выполнение расчетно-графической (контрольной) работы по теме «Численные методы линейной алгебры».

Рекомендуемая литература:

основная [1, 2];

дополнительная [1, 2,3].

Тема 8. Методы приближения и аппроксимация функций

Лекция. Интегральная и точечная среднеквадратичная аппроксимация функций. Постановка задачи аппроксимации функций по методу наименьших квадратов (МНК). Выбор системы линейно-независимых функций для построения нормальной системы уравнений в МНК.

Практическое занятие. Линейная интегральная и точечная аппроксимация функций по методу наименьших квадратов.

Практическое занятие. Выравнивание экспериментальных данных. Подбор аппроксимирующей функции.

Лабораторная работа. Методы приближения и аппроксимация функций.

Самостоятельная работа. Интегральное и точечное приближение функций алгебраическими многочленами Лежандра и Чебышева. Выполнение расчетно-графической (контрольной) работы по теме «Аппроксимация функций по МНК».

Рекомендуемая литература:

основная [1, 2];

дополнительная [1, 2,3].

Тема 9. Численные методы решения нелинейных уравнений

Лекция. Методы отделения корней уравнения. Метод половинного деления. Метод касательных (Ньютона). Метод итераций.

Практическое занятие. Численные методы решения нелинейных уравнений.

Самостоятельная работа. Разработка алгоритмов численного решения нелинейных уравнений. Выполнение расчетно-графической (контрольной) работы по теме «Численные методы решения нелинейных уравнений».

Рекомендуемая литература:

основная [1, 2];

дополнительная [1, 2,3].

Тема 10. Итерационные методы решения нелинейных уравнений и систем

Лекция. Достаточные условия сходимости итерационных процессов. Решение систем нелинейных уравнений методом итераций. Оценка погрешности решения итерационных методов.

Практическое занятие. Решение систем нелинейных уравнений методом итераций.

Лабораторная работа. Решение нелинейных уравнений и систем методом итераций.

Самостоятельная работа. Составление алгоритмов решения нелинейных уравнений и систем методом итераций.

Рекомендуемая литература:

основная [1, 2];

дополнительная [1, 2,3].

Тема 11. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

Лекция. Понятие о численном решении задачи Коши. Классификация методов. Метод Эйлера и его модификации. Метод Рунге-Кутты. Метод Адамса с итерациями. Правило Рунге практической оценки погрешности.

Практическое занятие. Численное решение ОДУ 1-го порядка методом Эйлера.

Практическое занятие. Численное решение ОДУ 1-го порядка методом Рунге-Кутта.

Самостоятельная работа. Составление алгоритмов численного решения ОДУ 1-го порядка. Выполнение расчетно-графической (контрольной) работы по теме «Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и систем ОДУ».

Рекомендуемая литература:

основная [1, 2];

дополнительная [1, 2,3].

Тема 12. Численные методы одномерной оптимизации

Лекция. Необходимые и достаточные условия экстремума в задачах одномерной оптимизации. Унимодальные функции. Схема сужения промежутка унимодальности функции. Метод половинного деления. Метод золотого сечения. Метод сканирования.

Практическое занятие. Метод золотого сечения нахождения минимума функции одной переменной. Метод сканирования. Метод половинного деления.

Практическое занятие. Решение задач на нахождение минимума функции одной переменной разными методами.

Самостоятельная работа. Составление алгоритмов безусловной оптимизации для функции одной переменной.

Рекомендуемая литература:

основная [1, 2];

дополнительная [1, 2,3].

Тема 13. Численные методы решения систем дифференциальных уравнений (ДУ) высокого порядка

Лекция. Численные методы решения ДУ высокого порядка. Численные методы решения систем ДУ высокого порядка.

Практическое занятие. Численные методы решения ДУ высокого порядка и систем ДУ высокого порядка.

Самостоятельная работа. Составление алгоритмов решения ДУ и систем ДУ высокого порядка.

Рекомендуемая литература:

основная [1, 2];

дополнительная [1, 2,3].

5. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины

При реализации программы дисциплины используются лекционные, практические и лабораторные занятия.

Общими целями занятий являются:

- обобщение, систематизация, углубление, закрепление теоретических знаний по конкретным темам дисциплины;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализация единства интеллектуальной и практической деятельности;
- выработка при решении поставленных задач профессионально значимых качеств: самостоятельности, ответственности, точности, творческой инициативы.

Целями лекции являются:

- формирование систематизированных научных знаний по дисциплине с акцентом внимания на наиболее сложных вопросах построения математических моделей в области системного анализа и автоматического управления с применением вычислительных методов;
- стимулирование активной познавательной деятельности обучающихся, способствующей формированию их творческого мышления.

В ходе практического занятия обеспечивается процесс активного взаимодействия обучающихся с преподавателем; приобретаются практические навыки и умения. Цель практического занятия: углубить и закрепить знания, полученные на лекции; формирование навыков использования знаний для решения практических задач; выполнение тестовых заданий по проверке полученных знаний и умений.

Целью лабораторного занятия является усвоение теоретических основ дисциплины и получение практических навыков исследования путем постановки, проведения, обработки и представления результатов эксперимента на основе практического использования различных методов (наблюдения, сравнения и др.), приобретения навыков опыта творческой деятельности.

Лабораторная работа – самостоятельное выполнение каждым обучающимся учебной группы экспериментального задания на лабораторном занятии. При ее проведении каждым обучающимся осуществляется самостоятельная обработка и представление результатов в виде отчета по лабораторной работе.

Самостоятельная работа обучающихся направлена на углубление и закрепление знаний, полученных на лекциях и других занятиях, выработку

навыков самостоятельного активного приобретения новых, дополнительных знаний, подготовку к предстоящим занятиям, на выполнение расчётно-графических (контрольных) работ.

Консультации проводятся перед экзаменом с целью обобщения пройденного материала и разъяснения наиболее трудных вопросов, возникающих у обучающихся при изучении дисциплины.

6. Оценочные материалы по дисциплине

Текущий контроль успеваемости обеспечивает оценивание хода освоения дисциплины, проводится в соответствии с содержанием дисциплины по видам занятий в форме опроса, решения задач, тестирования, выполнения расчётно-графических (контрольных) работ.

Промежуточная аттестация обеспечивает оценивание промежуточных и окончательных результатов обучения по дисциплине, проводится в форме зачета/экзамена.

6.1. Примерные оценочные материалы:

6.1.1. Текущего контроля

Примерные вопросы для опроса:

1. Классификация вычислительных методов.
2. Правила записи абсолютной погрешности.
3. Правила записи относительной погрешности.
4. Определение верных цифр в результате по абсолютной погрешности.
5. Определение верных цифр в результате по относительной погрешности
6. Арифметические операции над приближенными числами. Оценка погрешности.
7. Корректность вычислительной задачи.
8. Обусловленность вычислительной задачи.
9. Норма линейного нормированного пространства.
10. Примеры линейного нормированного пространства.
11. Нормы векторов и матриц.
12. Нормы функций, непрерывных на отрезке.
13. Расстояние в линейных нормированных пространствах
14. Сходимость последовательностей в линейных нормированных пространствах.
15. Постановка задачи интерполяции.
16. Условие существования единственного интерполяционного многочлена.
17. Интерполяционный многочлен Лагранжа.

18. Интерполяционный многочлен Эйткина.
19. Интерполяционный многочлен Ньютона.
20. Конечные и разделённые разности функции.
21. Порядок точности по шагу простейших формул численного дифференцирования.
22. Порядок точности по шагу формул численного интегрирования.
23. Достаточное условие сходимости метода итераций для решения СЛАУ.
24. Критерий аппроксимации функций по методу наименьших квадратов.
25. Правила отделения корней нелинейных уравнений.
26. Условие сходимости метода Ньютона решения нелинейных уравнений.
27. Классификация методов решения обыкновенных ДУ.
28. Порядок точности по шагу методов решения обыкновенных ДУ.
29. Постановка задачи численного решения ОДУ первого порядка.
30. Правило приведения ОДУ высокого порядка к системе ОДУ первого порядка.

Примерная тематика расчетно-графических (контрольных) работ:

1. Интерполяция функций.
2. Численное интегрирование.
3. Численные методы решения СЛАУ.
4. Аппроксимация функций по методу наименьших квадратов.
5. Численные методы решения нелинейных уравнений.
6. Численные методы решения ОДУ и систем ОДУ.

Типовые задачи:

1. Округляя числа до трех значащих цифр (по правилу дополнения), определите абсолютную и относительную погрешности полученных приближенных чисел:
 - а) $a=2,1514$.
 - б) $a=94,525$.
2. Определите абсолютную погрешность приближенных чисел по их относительным погрешностям и количество верных значащих цифр:
 - а) $a^*=13267$; $\delta(a^*)=0,1\%$.
 - б) $a^*=0,896$; $\delta(a^*)=10\%$.
3. Определите количество верных знаков в числе x^* , если известна его абсолютная погрешность:
 - а) $x^*=0,3941$; $\Delta(x^*)=0,0025$.
 - б) $x^*=345,831$; $\Delta(x^*)=0,14 \cdot 10^{+2}$.
 - в) $x^*=0,00035$; $\Delta(x^*)=0,18 \cdot 10^{-2}$.

4. Найдите суммы приближенных чисел, укажите их погрешности и количество верных значащих цифр, считая все знаки в слагаемых верными

а) $0,145+321+78,2$;

б) $0,301+193,1+11,58$;

5. Найдите суммы приближенных чисел, укажите их погрешности и количество верных значащих цифр:

$x_1 + x_2 - x_3$, где $x_1 = 197,6$; $\Delta(x_1) = 0,2$;

$x_2 = 23,44$; $\Delta(x_2) = 0,22$;

$x_3 = 201,55$; $\Delta(x_3) = 0,17$.

6. Найдите произведение приближенных чисел, укажите их погрешности и количество верных значащих цифр, считая все знаки в исходных данных верными:

а) $3,49 \cdot 8,6$;

б) $25,1 \cdot 1,743$.

7. Найдите частное приближенных чисел, считая в исходных данных все знаки верными:

а) $5,684:5,032$;

б) $0,144:1,2$.

8-9. Вычислите значение функции при указанном значении переменной x , найдите абсолютную и относительную погрешности результата, оцените качество результата по погрешности.

а) $y = x^3 \sin x$ при $x = \sqrt{2}$ ($\sqrt{2} \approx 1,414$);

б) $y = x \ln x$ при $x = \pi$ ($\pi \approx 3,142$).

10-11. Вычислите значение функции при указанных значениях аргументов. Оцените качество результата по абсолютной и относительной погрешностям:

а) $U = \ln(x_1 + x_2^2)$; $x_1 = 0,97$; $x_2 = 1,132$;

б) $U = \frac{x_1 + x_2^2}{x_3}$; $x_1 = 3,28$; $x_2 = 0,932$; $x_3 = 1,132$.

12-13. Какова должна быть точность аргумента x , чтобы получить значения функции с точностью $\Delta y = 0,1 \cdot 10^{-5}$?

а) $y = x^3 \cdot \sin x$; $x = \sqrt{2}$;

б) $y = x \ln x$; $x = \pi$.

14. С какой точностью должны быть вычислены аргументы, чтобы погрешность вычисления функции составляла $\Delta y = 0,5 \cdot 10^{-4}$?

$$U = \ln(x_1 + x_2^2), \quad x_1 = 0,9731; \quad x_2 = 1,13214.$$

15. Даны векторы:

$$A = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислить их m -, ℓ -, k -нормы и найти расстояния $d(A, B)$ и $d(C, D)$ для каждой из этих норм.

16. Даны два вектора:

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

На координатной плоскости Ox_1x_2 указать множество точек $(x_1; x_2)$, для которых:

$$\|X - A\|_k + \|X - B\|_k = 4.$$

17. Вычислить равномерные и квадратичные нормы функций $x(t)$ и $y(x)$ и определить расстояние $d(x, y)_C$ и $d(x, y)_{L^2}$:

$$x(t) = 1 - t, \quad y(t) = t^2 - t, \quad t \in [0; 1].$$

18-19. Найти пределы последовательностей векторов и матриц при $k \rightarrow \infty$:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{4k^2 - 3}}{2k + 1} \\ \frac{(k + 3)^2}{2k^2} \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} \frac{12k + 5}{\sqrt[3]{27k^3 - 6}} & \frac{6k - 5}{1 - \sqrt{k^4 + 3}} \\ \left(\frac{2k^2}{1 - k^2} + 3^{1/k} \right) & \frac{-4^{k+2}}{5^k} \end{pmatrix}.$$

20. Показать, что последовательность функций $x^{(k)}(t)$ сходится в среднем квадратичном к предельной функции $x(t)$:

$$x^{(k)}(t) = 1 - t^k, \quad t \in [0;1], \quad x(t) = 1, \quad t \in [0;1];$$

$$k=1,2,\dots$$

21-22. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа по следующим данным:

а)

i	0	1	2
x_i	0	2	3
y_i	1	3	2

б)

i	0	1	2
x_i	1	2	4
y_i	2	3	5

23-24. Вычислить заданные интегралы по формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона при $n = 2$ и $n = 4$. Оценить погрешность результатов.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}, \quad I = \frac{\pi}{4} \approx 0,785.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}, \quad I = \ln 2 \approx 0,693.$$

25. Решить системы линейных алгебраических уравнений методом итераций.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

26. Методом итераций решить нелинейные уравнения с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$

$$x^4 - 3x - 20 = 0 \quad (x > 0);$$

27. Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка на отрезке $[a, b]$ с шагом $h = 0,1$ методом Эйлера. Оценить погрешность по правилу Рунге.

$$y' = \frac{1+xy}{x^2}, \quad y|_{x=1} = 0, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad \varphi(x) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right).$$

28. Найдите численное решение задачи Коши методом Эйлера $y' = 0,25y^2 + x^2$, $y(0) = -1$ на интервале $[0; 0,5]$ с шагом $0,1$. Оцените погрешность метода, используя правило Рунге.

Типовые задания для тестирования:

Вопрос 1.

Если последовательные значения функции, являющейся решением задачи Коши для дифференциального уравнения $y' = 2y$ с начальными условиями $y(x_0) = y_0$, $x = x_0$, находятся по методу Эйлера с шагом 0,1, то y_1 равно

...

Ответы: а) $x_0 + 0,2y_0$

б) $1,2y_0$

в) $y_0 + 0,2x_0$

г) $0,2y_0$.

Вопрос 2.

С помощью квадратурных формул интерполяционного типа могут быть решены задачи

Ответы: а) численного дифференцирования

б) численного решения дифференциальных уравнений

в) численного интегрирования

г) численного решения нелинейных уравнений

Вопрос 3.

Квадратурная формула Ньютона-Котеса с тремя узлами называется также формулой

Ответы: а) прямоугольников

б) трапеций

в) Рунге

г) Симпсона.

Вопрос 4.

При начальном условии $y(x_0) = y_0$ итерационная последовательность с шагом h метода Эйлера решения задачи Коши для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ имеет вид

Ответы: а) $y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \dots$

б) $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \dots$

в) $y_{i+1} = y_i - f(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \dots$

г) $y_{i+1} = hf(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \dots$

Вопрос 5.

Порядок точности метода Эйлера решения задачи Коши по шагу

Ответы: а) $O(h)$

б) $O(h^2)$

в) $O(h^3)$

г) $O(h^4)$.

Вопрос №6.

Порядок точности метода Эйлера-Коши по шагу

Ответы: а) $O(h)$

- б) $O(h^2)$
- в) $O(h^3)$
- г) $O(h^4)$.

Вопрос 7.

Суммарная погрешность метода Эйлера-Коши имеет порядок

- Ответы:
- а) $O(h)$
 - б) $O(h^2)$
 - в) $O(h^3)$
 - г) $O(h^4)$.

Вопрос 8.

Суммарная погрешность метода Рунге-Кутты имеет порядок

- Ответы:
- а) $O(h^2)$
 - б) $O(h^3)$
 - в) $O(h^4)$
 - г) $O(h^5)$.

Вопрос №9.

Решение систем линейных алгебраических уравнений в схеме Гаусса численным методом состоит в приведении матрицы коэффициентов системы к

- Ответы:
- а) диагональному виду
 - б) единичной матрице
 - в) матрице меньшей размерности
 - г) треугольному виду.

Вопрос 10.

Вычисление определителя методом последовательного исключения неизвестных предполагает приведение матрицы к

- Ответы:
- а) диагональному виду
 - б) треугольному виду
 - в) матрице меньшей размерности
 - г) трехдиагональной.

Вопрос 11.

Методом Эйлера найти приближенно значение $y(1,01)$ решения дифференциального уравнения $\frac{dy}{dt} = 2\frac{y}{t} + 2t^3$, удовлетворяющего начальному условию: при $t = 1$ $y = 6$, выбрав шаг $h = 0,01$.

- Ответы:
- а) 3,41
 - б) 6,14
 - в) 5,01
 - г) 3,21.

Вопрос 12.

Построить итерационную последовательность метода Ньютона для решения уравнения $10x - e^x = 0$.

Ответы: а) $x_{n+1} = x_n - \frac{10x_n - e^{x_n}}{10 - e^{x_n}}$

б) $x_{n+1} = 10x_n - e^{x_n}$

в) $x_{n+1} = \frac{1}{10} e^{x_n}$

г) $x_{n+1} = x_n - e^{\frac{x_n}{10}}$.

Вопрос 13.

Методом Эйлера найти приближенно значение $y(1,01)$ решения дифференциального уравнения $\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} + 3t^3$, удовлетворяющего начальному условию: при $t=1$ $y=4$, выбрав шаг $h=0,01$.

Ответы: а) 4,07

б) 1,01

в) 5,41

г) 3,01.

Вопрос 14.

Построить итерационную последовательность метода Ньютона для решения уравнения $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$.

Ответы: а) $x_{n+1} = x_n^3 - 3x_n^2 - 3$

б) $x_{n+1} = (3x_n^2 - 3)^{\frac{1}{3}}$

в) $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + 3x_n^2 - 3}{3x_n^2 + 6x_n}$

г) $x_{n+1} = x_n - 3$.

Вопрос 15.

Методом Эйлера найти приближенно значение $y(1,005)$ решения дифференциального уравнения $\frac{dy}{dt} = 2\frac{y}{t^2} + 4t^3$, удовлетворяющего начальному условию: при $t=1$ $y=4$, выбрав шаг $h=0,005$.

Ответы: а) 3,005

б) 6,14

в) 4,06

г) 3,01.

Вопрос 16.

Построить итерационную последовательность метода Ньютона для решения уравнения $x - \sin x = 0,25$.

Ответы: а) $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \sin x_n - 0,25}{1 - \cos x_n}$

б) $x_{n+1} = x_n - \sin x_n$

в) $x_{n+1} = \sin x_n + 0,25$

г) $x_{n+1} = x_n - 0,25$.

Вопрос 17.

Методом Эйлера найти приближенно значение $y(1,02)$ решения дифференциального уравнения $\frac{dy}{dt} = 3\frac{y}{t^3} + t^2$, удовлетворяющего начальному условию: при $t=1$ $y=4$, выбрав шаг $h=0,02$.

- Ответы: а) 4,26
б) 6,14
в) 3,42
г) 4,12.

Вопрос 18.

Построить итерационную последовательность метода Ньютона для решения уравнения $x^5 + 2x^3 = 4$.

- Ответы: а) $x_{n+1} = (4 - 2x_n^3)^{\frac{1}{5}}$
б) $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 + 2x_n^3 - 4}{5x_n^4 + 6x_n^2}$
в) $x_{n+1} = 5x_n^4 + 6x_n^2$
г) $x_{n+1} = x_n - 4,25$.

Вопрос 19.

Метод Эйлера решения задачи Коши имеет суммарный порядок точности относительно шага h

- Ответы: а) h
б) h^3
в) h^4
г) h^5 .

Вопрос 20.

Методом Эйлера найти приближенно значение $y(1,01)$ решения дифференциального уравнения $\frac{dy}{dt} = 3\frac{y}{t^2} + 2t^4$, удовлетворяющего начальному условию: при $t=1$ $y=5$, выбрав шаг $h=0,01$.

- Ответы: а) 15,05
б) 5,0
в) 5,17
г) 3,05.

6.1.2. Промежуточной аттестации

Примерный перечень вопросов, выносимых на зачет
4 семестр

1. Математическое моделирование и решение инженерных задач на ЭВМ.
2. Классификация вычислительных задач.
3. Корректность вычислительных задач.
4. Обусловленность вычислительных задач.
5. Классификация вычислительных методов.
6. Методы эквивалентных преобразований. Примеры.
7. Методы аппроксимации. Примеры.
8. Условие сходимости методов аппроксимации.
9. Прямые (точные) вычислительные методы. Примеры.
10. Итерационные вычислительные методы. Примеры.
11. Статистические вычислительные методы. Примеры.
12. Условие сходимости и останова итерационных методов.
13. Источники и классификация погрешностей численного решения задачи.
14. Приближенные числа. Правила записи приближенных чисел.
15. Абсолютная погрешность приближенного числа. Правила записи.
16. Относительная погрешность приближенного числа. Правила записи.
17. Понятие верной цифры в приближенном числе и правило нахождения.
18. Погрешность суммы и разности приближенных чисел.
19. Погрешность произведения и частного приближенных чисел.
20. Погрешность вычисления функции одной переменной.
21. Погрешность вычисления функции нескольких переменных.
22. Обратная задача теории погрешности для функции одной переменной.
23. Обратная задача теории погрешности для функции нескольких переменных.
24. Погрешность арифметических операций над приближенными числами.
25. Погрешность функции.
26. Особенности машинной арифметики.
27. Понятие линейного нормированного пространства. Примеры.
28. Понятие нормы в линейном нормированном пространстве векторов.
29. Понятие нормы в линейном нормированном пространстве матриц.
30. Понятие нормы в линейном нормированном пространстве функций, непрерывных на отрезке.
31. Понятие кубической нормы. Примеры.
32. Понятие октаэдрической нормы. Примеры.
33. Понятие равномерной нормы. Примеры.
34. Понятие квадратичной нормы. Примеры.
35. Вычисление расстояния в линейных нормированных пространствах.
36. Вычисление абсолютной и относительной погрешности в линейных нормированных пространствах.

37. Сходимость последовательностей в линейных нормированных пространствах.
38. Понятие об интерполяции. Интерполяция обобщенными многочленами.
39. Интерполяционный многочлен Лагранжа.
40. Интерполяционная схема Эткина.
41. Погрешность интерполяции по формуле Лагранжа.
42. Конечные разности и их свойства.
43. Интерполяционный многочлен Ньютона для равноотстоящих узлов.
44. Разделенные разности и их свойства.
45. Интерполяционный многочлен Ньютона для неравных промежутков.
46. Оценка погрешности интерполяции по таблице конечных разностей.
47. Приближенное вычисление производной по её определению. Оценка погрешности.
48. Конечно-разностная аппроксимация производных.
49. Вычисление производных с использованием интерполяционного многочлена Лагранжа.
50. Вычисление производных с использованием интерполяционного многочлена Ньютона.
51. Вычисление производных в промежуточных узлах таблицы.
52. Формулы прямоугольников численного интегрирования. Оценка погрешности.
53. Формула трапеций численного интегрирования. Оценка погрешности.
54. Формула Симпсона численного интегрирования. Оценка погрешности.
55. Правило Рунге практической оценки погрешности.
56. Оценка погрешности результата численного интегрирования по таблице конечных разностей.
57. Порядок точности формул численного интегрирования.
58. Формула Гаусса численного интегрирования.
59. Численное интегрирование несобственных интегралов первого рода.
60. Численное интегрирование несобственных интегралов второго рода.
61. Приближенное решение систем линейных алгебраических уравнений в схеме Гаусса.
62. Приближенное вычисление определителя в схеме Гаусса.
63. Приближенное вычисление обратной матрицы в схеме Гаусса.
64. Итерационный метод решения СЛАУ. Необходимое и достаточное условия сходимости метода.

Примерный перечень вопросов, выносимых на экзамен

5 семестр

1. Постановка задачи численного решения нелинейных уравнений. Требование к функции и к её первой и второй производных на участке непрерывности функции.
2. Графический метод отделения корней нелинейного уравнения.
3. Аналитический метод отделения корней нелинейного уравнения.
4. Метод дихотомии численного решения нелинейного уравнения.
5. Метод Ньютона (касательных) при численном решении нелинейного уравнения.
6. Достаточное условие сходимости метода Ньютона решения нелинейного уравнения.
7. Постановка задачи численного решения нелинейного уравнения методом итераций.
8. Достаточное условие сходимости метода итераций решения нелинейного уравнения.
9. Оценка числа итераций при решении нелинейного уравнения.
10. Метод итераций решения нелинейного уравнения.
11. Постановка задачи численного решения систем нелинейных уравнений.
12. Графическое отделение корней системы нелинейных уравнений.
13. Достаточное условие сходимости метода итераций при решении систем нелинейных уравнений.
14. Правило достижения достаточного условия сходимости процесса итераций при решении систем нелинейных уравнений.
15. Метод итераций решения систем нелинейных уравнений.
16. Постановка задачи точечной аппроксимации функций методом наименьших квадратов (МНК). Критерий аппроксимации по МНК.
17. Постановка задачи интегральной аппроксимации функций по методу наименьших квадратов (МНК). Критерий аппроксимации по МНК.
18. Запись необходимого условия минимума критерия аппроксимации методом наименьших квадратов (МНК).
19. Составление нормальной системы линейных уравнений в МНК.
20. Точечная линейная аппроксимация функций методом наименьших квадратов (МНК). Составление системы линейных уравнений для решения задачи.
21. Интегральная линейная аппроксимация функций методом наименьших квадратов (МНК). Составление системы линейных уравнений для решения задачи.
22. Составление таблицы для оценки погрешности аппроксимации функций методом наименьших квадратов. Оценка погрешности аппроксимации по m -норме.
23. Составление таблицы для оценки погрешности аппроксимации функций методом наименьших квадратов. Оценка погрешности аппроксимации по k -норме.

24. Оценка погрешности аппроксимации функций по методу наименьших квадратов.
25. Выравнивание исходных данных и подбор аппроксимирующей функции методом наименьших квадратов.
26. Постановка задачи численного решения ОДУ первого порядка. Классификация методов.
27. Метод Эйлера численного решения ОДУ первого порядка. Порядок точности метода по шагу.
28. Метод Эйлера-Коши численного решения ОДУ первого порядка. Порядок точности метода по шагу.
29. Метод Рунге-Кутты численного решения ОДУ первого порядка. Порядок точности метода по шагу.
30. Метод Адамса численного решения ОДУ первого порядка. Порядок точности метода по шагу.
31. Правило Рунге оценки погрешности численного решения ОДУ первого порядка. Составление таблицы для оценки погрешности.
32. Постановка задачи численного решения одномерной минимизации функции. Достаточное условие унимодальности функции на отрезке.
33. Метод половинного деления одномерной минимизации функции.
34. Метод «золотого сечения» одномерной минимизации функций.
35. Метод сканирования одномерной минимизации функций.
36. Постановка задачи численного решения нормальной системы ДУ первого порядка.
37. Метод Рунге-Кутты решения нормальной системы ДУ первого порядка.
38. Метод Эйлера решения нормальной системы ДУ первого порядка.
39. Способ приведения системы ДУ высокого порядка к нормальной системе ДУ. Пример.
40. Метод Ньютона решения системы нелинейных уравнений.
41. Достаточное условие сходимости метода Ньютона при решении нелинейных уравнений.
42. Численное решение ДУ высокого порядка методом Эйлера.
43. Численное решение ДУ высокого порядка методом Рунге-Кутты.
44. Оценка погрешности при численном решении ДУ высокого порядка.
45. Правило Рунге практической оценки погрешности численного решения нормальной системы ДУ первого порядка.
46. Метод численного решения ДУ высокого порядка.
47. Метод численного решения систем ДУ высокого порядка.
48. Сравнительная оценка по точности численных методов ДУ первого порядка.
49. Многошаговые методы решения ДУ первого порядка. Примеры.
50. Методы прогноза и коррекции решения ДУ первого порядка. Примеры.

6.2. Шкала оценивания промежуточной аттестации и критерии выставления оценок

Промежуточная аттестация: зачёт, экзамен

Форма контроля	Показатели оценивания	Критерии выставления оценок	Шкала оценивания
зачет	правильность и полнота ответа	дан правильный, полный ответ на поставленный вопрос, показана совокупность осознанных знаний по дисциплине, доказательно раскрыты основные положения вопросов; могут быть допущены недочеты, исправленные самостоятельно в процессе ответа; дан правильный, недостаточно полный ответ на поставленный вопрос, показано умение выделить существенные и несущественные признаки, причинно-следственные связи; могут быть допущены недочеты, исправленные с помощью преподавателя; дан недостаточно правильный и полный ответ; логика и последовательность изложения имеют нарушения; в ответе отсутствуют выводы.	зачтено
		ответ представляет собой разрозненные знания с существенными ошибками по вопросу; присутствуют фрагментарность, нелогичность изложения; дополнительные и уточняющие вопросы не приводят к коррекции ответа на вопрос.	не зачтено
экзамен	правильность и полнота ответа	дан правильный, полный ответ на поставленный вопрос, показана совокупность осознанных знаний по дисциплине, доказательно раскрыты основные положения вопросов; могут быть допущены недочеты, исправленные самостоятельно в процессе ответа.	отлично
		дан правильный, недостаточно полный ответ на поставленный вопрос, показано умение выделить существенные и несущественные признаки, причинно-следственные связи; могут быть допущены недочеты, исправленные с помощью преподавателя.	хорошо

		дан недостаточно правильный и полный ответ; логика и последовательность изложения имеют нарушения; в ответе отсутствуют выводы.	удовлетворительно
		ответ представляет собой разрозненные знания с существенными ошибками по вопросу; присутствуют фрагментарность, нелогичность изложения; дополнительные и уточняющие вопросы не приводят к коррекции ответа на вопрос.	неудовлетворительно

7. Ресурсное обеспечение дисциплины

7.1. Лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение отечественного производства

- Статистическая диалоговая система STADIA [ПО-6FF-561] - Статистическая диалоговая система [Лицензионное. Номер в Едином реестре российских программ для электронных вычислительных машин и баз данных - 9064]

- SMath Studio [ПО-А68-516] - Программное обеспечение для вычисления математических выражений и построения графиков функций [Свободно распространяемое. Номер в Едином реестре российских программ для электронных вычислительных машин и баз данных - 12849]

- МойОфис Образование [ПО-41В-124] - Полный комплект редакторов текстовых документов и электронных таблиц, а также инструментарий для работы с графическими презентациями [Свободно распространяемое. Номер в Едином реестре российских программ для электронных вычислительных машин и баз данных - 4557]

- Astra Linux Common Edition релиз Орел [ПО-25В-603] - Операционная система общего назначения "Astra Linux Common Edition" [Коммерческая (Full Package Product). Номер в Едином реестре российских программ для электронных вычислительных машин и баз данных - 4433]

7.2. Профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1. Федеральный портал «Российское образование» <http://www.edu.ru/> (свободный доступ).

2. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://window.edu.ru/> , доступ только после самостоятельной регистрации.

3. Научная электронная библиотека «eLIBRARY.RU» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.elibrary.ru/> доступ только после самостоятельной регистрации.

4. Электронная библиотека университета <http://elib.igps.ru/> (авторизованный доступ).

5. Электронно-библиотечная система «ЭБС IPR BOOKS» <http://www.iprbookshop.ru/> (авторизованный доступ).

7.3. Литература

Основная литература:

1. Каменецкая, Наталия Владимировна. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Текст] : учебное пособие. Ч. 1. Элементы линейной алгебры / Н. В. Каменецкая, 2015. - 116 с. Режим доступа: <http://elib.igps.ru/?41&type=card&cid=ALSFR-696fdd29-919a-447e-aae1-83befbdc37bc>

2. Каменецкая, Наталия Владимировна. Вычислительная математика. Критерии оценки вычислений [Текст] : учебное пособие : [гриф УМО] / Н. В. Каменецкая, 2018. - 124 с. Режим доступа: <http://elib.igps.ru/?8&type=card&cid=ALSFR-00b39013-a0b3-44c2-ac7c-8a1c75c98826&remote=false>

Дополнительная литература:

1. Каменецкая, Наталия Владимировна. Вычислительная математика [Текст]: учебное пособие. Ч.1. Вычислительные методы [гриф НМС по математике Минобрнауки РФ] / Н. В. Каменецкая ; ред. Э. Н. Чижиков, 2018. - 116 с. Режим доступа: <http://elib.igps.ru/?24&type=card&cid=ALSFR-3033af98-8502-4168-834b-f7de25fb1a56&remote=false>

2. Каменецкая, Наталия Владимировна. Вычислительная математика [Текст]: учебное пособие. Ч.II. Вычислительные методы [гриф НМС по математике Минобрнауки РФ] / Н. В. Каменецкая ; ред. Э. Н. Чижиков, 2018. - 112 с. Режим доступа: <http://elib.igps.ru/?6&type=card&cid=ALSFR-a90da4a8-3b27-4e4b-b3bb-86968a2b573b&remote=false>

3. Математические методы оптимизации процессов оперативного реагирования сил и средств МЧС России: учебное пособие: [гриф МЧС] Каменецкая Н.В. [и др.] Издательство: Санкт-Петербургский университет ГПС МЧС России, Санкт-Петербург, 2022. – 116 с. Режим доступа: <http://elib.igps.ru/?21&type=card&cid=ALSFR-3b185da9-9991-4aec-80b0-d72f53b2925b&remote=false>

7.4. Материально-техническое обеспечение

Для проведения и обеспечения занятий используются помещения, которые представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой бакалавриата, оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения: автоматизированное рабочее место преподавателя, маркерная доска, мультимедийный проектор, посадочные места обучающихся.

Для проведения лабораторных работ используется лаборатория вычислительной техники.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде университета.

Автор: канд. техн. наук, доцент Каменецкая Н.В., канд. пед. наук, доцент Трофимец Е.Н.